Ganzzahlige Krähenfüße

von Volker Diels-Grabsch, Berlin

In seinem Artikel „Höherdimensionale Krähenfüße“ [2] gab Armin Singer eine induktive Formel zur Konstruktion eines n-dimensionalen Krähenfußes an. Eine der abschließenden Fragen, nämlich für welche Dimensionen es „schöne“ Darstellungen von n-Krähenfüßen gibt und wie man sie erzeugt, soll dieser Artikel näher ergründen. {singer}

1 Definition ganzzahliger Krähenfüße

Definition (Krähenfuß)**.** Ein n-*Krähenfuß* ist eine Menge von n Einheitsvektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ in einem $(n-1)$-dimensionalen Raum, die paarweise das gleiche Skalarprodukt $\langle v_i, v_j \rangle = -\frac{1}{n-1}$ (für $i \neq j$) haben.[1]

Da es sich um Einheitsvektoren handelt, haben sie paarweise zueinander den gleichen Winkel

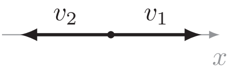
$$\measuredangle(v_i, v_j) = \arccos\left(-\frac{1}{n-1}\right).$$

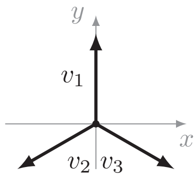
In Koordinaten-Schreibweise notieren wir einen Krähenfuß als Liste von Spalten-Vektoren, die wir zu einer Matrix zusammenfassen. Dabei nehmen wir uns die Freiheit, „krumme“ Vorfaktoren λ auszuklammern:

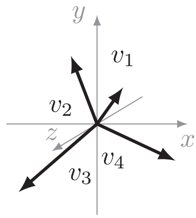
$$K_n = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ v_1' & \cdots & v_n' \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}.$$

So lassen sich die drei kleinsten n-Krähenfüße mit $n = 2, 3, 4$ folgendermaßen darstellen:

[1] Der Wert $-\frac{1}{n-1}$ ist dabei nicht willkürlich gewählt, sondern folgt direkt aus der Bedingung der paarweisen Gleichheit des Skalarproduktes. Diese Folgerung sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.







$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Der 4-Krähenfuß beschreibt dabei die Form des realen – namensgebenden – Krähenfußes, der in der Geschichte als Defensivwaffe genutzt wurde. Er besteht aus vier Einheitsvektoren im 3-dimensionalen Raum, die paarweise in einem Winkel von $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109{,}5^\circ$ zueinander stehen. Hierzu stellt man sich am besten ein regelmäßiges Tetraeder vor. Der Krähenfuß besteht dann genau aus den vier Vektoren vom Umkugel-Mittelpunkt zu den vier Ecken.

An den vorherigen Beispielen sehen wir, dass sich bestimmte 2- und 4-Krähenfüße durch recht einfache Matrizen beschreiben lassen. Es gibt zwar einen gewissen normierenden Vorfaktor, aber die nachfolgenden Matrix-Einträge sind ganzzahlig; sie bestehen sogar nur aus den Einträgen 1 und -1. Für den 3-Krähenfuß hingegen gibt es keine solche ganzzahlige Darstellung; der Beweis sei dem geneigten Leser überlassen.

Präzise ausgedrückt suchen wir nach Folgendem:

Definition. Ein n-Krähenfuß heißt *ganzzahlig*, wenn seine Matrix-Darstellung die folgende Form besitzt:

$$\begin{aligned} K_n = \lambda \cdot (a_{ij}) \quad & \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \\ & \text{und } a_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n-1\},\ j \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Die Frage lautet nun, wie wir für möglichst viele n einen ganzzahligen n-Krähenfuß finden. Dazu machen wir zunächst einen kleinen Abstecher zu den Orthonormalbasen, die uns als Hilfsmittel dienen werden.

2 Orthonormalbasen

Anschaulich ist eine ONB ein Koordinatensystem, das beliebig verdreht im Raum liegt. Der gedankliche Sprung von Krähenfüßen zu Orthonormalbasen ist gar nicht so groß, denn ihre Definitionen sind sehr ähnlich.

Definition (Orthonormalbasis)**.** Eine n-dimensionale ONB ist eine Menge von n Einheitsvektoren $b_1, b_2, \ldots, b_n$, die paarweise senkrecht aufeinander stehen, das heißt, deren paarweises Skalarprodukt gleich 0 ist. Formal:

$$\begin{aligned} b_i &\in \mathbb{R}^n && \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}\,, \\ \langle b_i, b_i \rangle &= 1 && \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}\,, \\ \langle b_i, b_j \rangle &= 0 && \text{für alle } i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } i \neq j\,. \end{aligned}$$

Wie üblich notieren wir $b_1, b_2, \ldots, b_n$ als Spaltenvektoren und fassen diese zu einer Matrix B zusammen:[2]

$$B = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}.$$

Die folgenden Eigenschaften einer ONB werden für uns nützlich sein:

Lemma. Vertauschen wir zwei Spalten einer ONB, so bleibt das Ergebnis eine ONB.

Beweis. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass die Reihenfolge der Vektoren in der ONB-Definition keine Rolle spielt. □

Lemma (Vorzeichen-Lemma)**.** Kehren wir in einer Spalte einer ONB sämtliche Vorzeichen um, so ist das Ergebnis weiterhin eine ONB.

Beweis. Anschaulich lassen wir lediglich einen der Einheitsvektoren in die entgegengesetzte Richtung zeigen. Damit ist es immer noch ein Einheitsvektor, der weiterhin senkrecht auf allen anderen steht, also bleiben alle Eigenschaften der ONB-Definition erfüllt. □

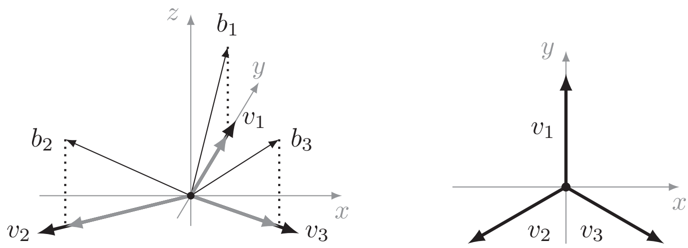
3 Orthonormalbasen mit konstanter Höhe

Wir wollen nun versuchen, einen Zusammenhang zwischen Krähenfüßen und Orthonormalbasen herzuleiten. Schauen wir uns den 3-Krähenfuß genauer an, erinnert uns dieses Bild stark an die Koordinaten-Achsen im 3-dimensionalen Raum. Das ist kein Zufall, denn der 3-Krähenfuß ist genau die isometrische Projektion einer ONB.

Hierzu wird das ONB zunächst in die xy-Ebene projiziert, wobei wir voraussetzen, dass jeder Vektor der ONB die gleiche Höhe, also z-Koordinate, hat.

[2] In dieser Notation ist obige Definition gleichbedeutend damit, dass B eine orthogonale Matrix ist, das heißt: $B^T B = I$, wobei I die n-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.

So werden die Winkel zwischen den Vektoren gleichmäßig verzerrt, und die Bild-Vektoren stehen immer noch paarweise im gleichen Winkel zueinander, wenn auch nicht mehr im rechten Winkel. Hierbei werden die Vektoren gestaucht, jeweils um den gleichen Faktor. Um zum 3-Krähenfuß zu gelangen, müssen alle Vektoren nachträglich durch Multiplikation mit einem gemeinsamen Faktor auf Länge 1 gestreckt werden.



Dieses Verfahren möchten wir nun auf beliebige Dimensionen erweitern. Da es allerdings nur für bestimmte ONB funktioniert, führen wir zunächst den Begriff der *ONB mit konstanter Höhe* ein, welche eine eineindeutige Zuordnung zu Krähenfüßen erlauben.

Definition. Eine n-dimensionale ONB habe *konstante Höhe*, wenn ihre Vektoren in der n-ten Koordinate alle den Wert $\frac{1}{\sqrt{n}}$ haben.[3] In Matrix-Schreibweise:

$$B = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}.$$

Satz. Jeder n-dimensionalen ONB mit konstanter Höhe entspricht genau ein n-Krähenfuß und umgekehrt.

1. Einer ONB mit konstanter Höhe wird derjenige Krähenfuß zugeordnet, der entsteht, indem jedem Vektor die n-te Koordinate entfernt wird und das Ergebnis mit $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$ multipliziert wird.
2. Einem Krähenfuß wird diejenige ONB mit konstanter Höhe zugeordnet, die entsteht, indem jeder Vektor mit $\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$ multipliziert wird und anschließend der Wert $\frac{1}{\sqrt{n}}$ als n-te Koordinate hinzugefügt wird.

[3] Übungsaufgabe: Ist in einer ONB der Wert aller n-ten Koordinaten gleich, so ist dieser gemeinsame Wert entweder $\frac{1}{\sqrt{n}}$ oder $-\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Beweis. Offenbar ist jede Zuordnung jeweils die Umkehrung der anderen. Es bleibt zu zeigen, dass das Ergebnis jeweils tatsächlich ein n-Krähenfuß bzw. eine n-dimensionale ONB ist.

Sei $b_1, \dots, b_n$ eine n-dimensionale ONB mit konstanter Höhe. Die Koordinaten von b_i seien $b_{1,i}, \dots, b_{n,i}$. Dann ist

$$b_i = \begin{pmatrix} b_{1,i} \\ \vdots \\ b_{n-1,i} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_i = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \begin{pmatrix} b_{1,i} \\ \vdots \\ b_{n-1,i} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_i \rangle &= \frac{n}{n-1} \cdot \left(b_{1,i}^2 + \dots + b_{n-1,i}^2\right) \\ &= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\langle b_i, b_i \rangle - \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right) = \frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1\,. \end{aligned}$$

Weiterhin folgt für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_j \rangle &= \frac{n}{n-1} \cdot (b_{1,i} b_{1,j} + \dots + b_{n-1,i} b_{n-1,j}) \\ &= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\langle b_i, b_j \rangle - \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n-1} \cdot \left(0 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n-1}\,. \end{aligned}$$

Also ist $v_1, \dots, v_n$ ein n-Krähenfuß, denn alle v_i sind Einheitsvektoren, die paarweise das gleiche Skalarprodukt $\langle v_i, v_j \rangle = -\frac{1}{n-1}$ haben.

Sei nun umgekehrt $v_1, \dots, v_n$ ein n-Krähenfuß, dann ist

$$v_i = \begin{pmatrix} v_{1,i} \\ \vdots \\ v_{n-1,i} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_i = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} v_{1,i} \\ \vdots \\ \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} v_{n-1,i} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} v_{1,i} \\ \vdots \\ v_{n-1,i} \\ \frac{1}{\sqrt{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Analog zu den obigen Rechnungen erhalten wir $\langle b_i, b_i \rangle = 1$ und $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$. Also ist $b_1, \dots, b_n$ eine ONB. □

Beispiel (Krähenfuß zu ONB)**.** Wir wandeln unseren 3-Krähenfuß vom

Anfang in eine 3-dimensionale ONB mit konstanter Höhe um:

$$K_3 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \cdot K_3 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel (ONB zu Krähenfuß)**.** Wir wandeln die folgende 4-dimensionale ONB mit konstanter Höhe in einen 4-Krähenfuß um:

$$B_4 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_4 = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4-1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definition. Eine *ganzzahlige n-dimensionale ONB* ist eine n-dimensionale ONB, deren Matrix-Darstellung die folgende Form besitzt:

$$B_n = \lambda \cdot (a_{ij}) \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } a_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ für alle } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Wenn wir also ganzzahlige Krähenfüße suchen, suchen wir in Wirklichkeit ganzzahlige ONB mit konstanter Höhe. Der restliche Teil dieses Artikels wird verschiedene Methoden vorstellen, um genau solche ONB zu konstruieren. Wir profitieren hierbei von der Tatsache, dass ONB im Gegensatz zu Krähenfüßen sehr gründlich erforscht wurden. Dabei interessieren uns besonders die Erkenntnisse über *Hadamard-Matrizen.*

4 Hadamard-Matrizen

Definition. Eine *Hadamard-Matrix* ist eine Matrix, deren Spaltenvektoren paarweise senkrecht aufeinander stehen und deren Einträge ausschließlich ± 1 sind.

Diese Definition klingt ziemlich genau nach dem, was wir suchen. Bevor wir allerdings Hadamard-Matrizen in Krähenfüße umwandeln können, müssen wir folgende zwei Probleme aus dem Weg räumen:

1. Eine Hadamard-Matrix ist fast eine ONB, aber nicht ganz. Zwar stehen alle Vektoren paarweise senkrecht aufeinander, aber sie sind nicht auf die Länge 1 normiert.
2. Wir benötigen eine ONB mit konstanter Höhe.

Das erste Problem lösen wir mit dem normierenden Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{n}}$, der jeden Spaltenvektor einer Hadamard-Matrix zu einem Einheitsvektor normiert. Die so entstandene ONB nennen wir Hadamard-ONB.

Um eine Hadamard-ONB in eine solche mit konstanter Höhe umzuformen, nutzen wir das Vorzeichen-Lemma. Hierzu kehren wir für alle Spalten, deren n-te Koordinate $-\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist, das Vorzeichen um. Das Ergebnis ist wieder eine Hadamard-ONB, deren unterste Zeile nur positive Einträge $\frac{1}{\sqrt{n}}$ hat.

Nachdem wir diese beiden Probleme aus der Welt geschafft haben, können wir uns endlich der Konstruktion von Hadamard-Matrizen zuwenden. Da dieses Thema leicht einen eigenen Artikel füllen kann, werden wir uns auf die wichtigsten Erkenntnisse beschränken und deren Beweise außen vor lassen.

Hadamard-Matrizen sind nach dem Mathematiker Jacques Hadamard benannt und existieren grundsätzlich nur für die Dimensionen $n = 1$, $n = 2$ und durch 4 teilbare Dimensionen $n = 4k$ mit $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. In allen anderen Fällen ist die Konstruktion beweisbar unmöglich. Die Hadamard-Vermutung besagt, dass für jede Dimension $n = 4k$ tatsächlich eine Hadamard-Matrix existiert, allerdings wurde noch nicht für alle Dimensionen $n = 4k$ eine solche Konstruktion gefunden.

Im Folgenden stellen wir die wichtigsten Konstruktionswerkzeuge vor, mit denen wir eine Vielzahl von Dimensionen abdecken können.[4]

Satz. Für $n = 1$ und $n = 2$ existieren Hadamard-Matrizen

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Satz (Sylvester-Konstruktion)**.** Aus jeder n-dimensionalen Hadamard-Matrix H_n können wir eine $2n$-dimensionale Hadamard-Matrix H_{2n} wie folgt konstruieren:[5,6]

$$H_{2n} = \begin{pmatrix} H_n & -H_n \\ H_n & H_n \end{pmatrix}.$$

[4] Diese Konstruktionen weichen von denen in der Literatur derart ab, als dass stets Hadamard-Matrizen mit letzter Zeile $(1 \cdots 1)$ entstehen. So erhalten wir direkt Hadamard-ONB mit konstanter Höhe.

[5] Übungsaufgabe: Zeige, dass die so konstruierte Matrix H_{2n} tatsächlich eine Hadamard-Matrix ist!

[6] Allgemeiner gilt sogar, dass das Kronecker-Produkt zweier Hadamard-Matrizen selbst wieder eine Hadamard-Matrix ist.

Satz (Erste Paley-Konstruktion)**.** Ist p eine Primzahl[7] mit $p \equiv 3 \pmod 4$, so können wir für $n = p + 1$ folgende Hadamard-Matrix konstruieren:

$$H_{p+1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \vdots & & Q_p - I_p & \\ 1 & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnet I_p die $p \times p$-Einheitsmatrix und Q_p die $p \times p$-Jacobsthal-Matrix.[8]

Nun ist es soweit! Wir haben endlich alle Werkzeuge beisammen, um unsere Krähenfüße zu konstruieren.

Beispiel (Ganzzahliger 8-Krähenfuß)**.** Wir starten mit der 2-dimensionalen Hadamard-Matrix und wenden die Sylvester-Konstruktion zweimal an:

$$H_4 = \begin{pmatrix} H_2 & -H_2 \\ H_2 & H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H_8 = \begin{pmatrix} H_4 & -H_4 \\ H_4 & H_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun normieren wir die Hadamard-Matrix zu einer Hadamard-ONB: $B_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot H_8$. Diese Hadamard-ONB hat bereits konstante Höhe, wir brauchen also keine Vorzeichen umzukehren. Schließlich wandeln wir die ONB in einen

[7] Diese Konstruktion funktioniert auch mit Primzahlpotenzen, indem wir das Legendre-Symbol und die Jacobsthal-Matrix von Primkörpern auf beliebige endliche Körper verallgemeinern.

[8] Diese ist definiert als $Q_p = (q_{ij})$ mit $q_{ij} = \left(\frac{j-i}{p}\right)$, wobei $\left(\frac{a}{p}\right)$ das Legendre-Symbol bezeichnet. Für eine Definition desselben siehe z. B. [1].

{berger}

8-Krähenfuß um:

$$K_8 = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel (Ganzzahliger 12-Krähenfuß)**.** Wir bemerken, dass $12 = 11+1$ mit der Primzahl $11 \equiv 3 \pmod 4$ ist. Wir starten mit der 11×11 Jacobsthal-Matrix[9]

$$Q_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren die Einheitsmatrix I_{11} (ersetzen also in der Diagonale die Werte 0 jeweils durch -1) und wenden die erste Paley-Konstruktion an:

$$H_{12} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \vdots & & Q_{11} - I_{11} & \\ 1 & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir normieren zu einer Hadamard-ONB, die bereits konstante Höhe hat,

[9] Die quadratischen Reste modulo 11 sind 1, 3, 4, 5 und 9. Die Legendre-Symbole $\left(\frac{0}{11}\right), \left(\frac{1}{11}\right), \ldots, \left(\frac{10}{11}\right)$ sind entsprechend $0, 1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1$. Dies ist zugleich die erste Zeile der Jacobsthal-Matrix. Die übrigen Zeilen erhalten wir durch zyklische Vertauschung.

und erzeugen aus dieser unseren Krähenfuß:

$$K_{12} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5 Alternativer Ansatz

Eine neuartige Methode[10] ist die Konstruktion geeigneter ONB mithilfe von Matrizen der Form

$$A_n = \lambda \cdot \begin{pmatrix} e & g & g & g & \cdots & g & f \\ e & g & g & g & & f & g \\ \vdots & \vdots & \vdots & & ⋰ & & \vdots \\ e & g & g & f & & g & g \\ e & g & f & g & \cdots & g & g \\ e & f & g & g & \cdots & g & g \\ e & e & e & e & \cdots & e & e \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } e, f, g \in \mathbb{Z}\,.$$

Für $g = 0$ werden solche Matrizen *Arrowhead-Matrizen* genannt, da die Form der übrigen Matrix-Einträge an eine Pfeilspitze (englisch: *arrowhead*) erinnert.[11] Strategisch gesehen haben diese Matrizen für uns folgende Vorteile:

1. Sie haben nur sehr wenige Freiheitsgrade.
2. Trotzdem kann man ihnen durch zusätzliche Einschränkungen die Struktur einer ONB „aufzwingen“.

[10] Der Autor hat diesen Ansatz zur Erzeugung ganzzahliger ONB selbst entdeckt und konnte ihn in der Literatur bislang nicht wiederfinden. Er freut sich über Hinweise aus der Leserschaft, falls dieser Ansatz doch nicht so neu sein sollte wie vermutet.

[11] In der gängigen Literatur zeigt die Pfeilspitze nach links oben. Für unsere Zwecke ist es jedoch nützlich, von dieser Konvention abzuweichen und die Pfeilspitze nach links unten zeigen zu lassen.

3. Die letzte Zeile ist bereits per Definition konstant.

Der Nachteil ist jedoch: Nicht für alle Dimensionen n gibt es ganzzahlige Lösungen.

Zunächst ignorieren wir die Ganzzahligkeit und betrachten λe, λf und λg jeweils als reelle Unbekannte. Die Spaltenvektoren von A_n bezeichnen wir wie üblich mit $b_1, \ldots, b_n$. Nun ist A_n genau dann eine ONB, wenn $\langle b_i, b_i \rangle = 1$ und $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$ gilt. Das sind insgesamt n^2 Gleichungen. Gruppieren wir sie jedoch, fällt uns Folgendes auf:

$$\begin{aligned}
1 &= \langle b_1, b_1 \rangle = n \cdot (\lambda e)^2, \\
1 &= \langle b_i, b_i \rangle = (n-2)(\lambda g)^2 + (\lambda f)^2 + (\lambda e)^2 && \text{für alle } i \in \{2, \ldots, n\}, \\
0 &= \langle b_1, b_j \rangle = (n-2)(\lambda e)(\lambda g) + (\lambda e)(\lambda f) + (\lambda e)^2 && \text{für alle } j \in \{2, \ldots, n\}, \\
0 &= \langle b_i, b_j \rangle = (n-3)(\lambda g)^2 + 2 \cdot (\lambda g)(\lambda f) + (\lambda e)^2 && \text{für alle } i, j \in \{2, \ldots, n\}.
\end{aligned}$$

Es sind in Wirklichkeit also nur vier Gleichungen. Da wir eine ONB mit konstanter Höhe benötigen, kommt noch eine fünfte Gleichung hinzu:

$$\lambda e = \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Wir haben also ein quadratisches Gleichungssystem mit 5 Gleichungen und 3 Unbekannten. Wir haben Glück[12], denn es gibt für jedes n eine oder mehrere Lösungen, und zwar mindestens die folgende:

$$\lambda e = \frac{1}{\sqrt{n}}\,, \qquad \lambda f = 1 - \frac{1}{n - \sqrt{n}}\,, \qquad \lambda g = -\frac{1}{n - \sqrt{n}}\,.$$

Nun wollen wir den gemeinsamen reellen Faktor λ so wählen, dass e, f und g ganzzahlig werden. Dies ist leider nicht für alle n möglich. Daher gehen wir den umgekehrten Weg: Wir nutzen λ, um die Nenner zu eliminieren und schauen, für welche n die resultierenden e, f und g ganzzahlig werden:

$$\lambda = \frac{1}{n - \sqrt{n}}\,, \qquad e = \sqrt{n} - 1\,, \qquad f = n - \sqrt{n} - 1\,, \qquad g = -1\,.$$

Offenbar liefert dieser Ansatz für alle quadratischen Dimensionen $n = k^2$ mit $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ eine ganzzahlige Lösung. Aber was haben wir dadurch gewonnen? Für gerade k erst einmal nichts, wir könnten stattdessen genauso gut

[12] Es handelt sich natürlich nicht um Glück, sondern um klassischen *Survivorship Bias*: Der Autor experimentierte mit verschiedenen Ansätzen und präsentiert hier aus Platzgründen lediglich denjenigen, der zu einem guten Ergebnis führte.

Hadamard-Matrizen verwenden. Aber für ungerade $k = 2\ell + 1$ erhalten wir Konstruktionen von ganzzahligen ONB ungerader Dimension $n = (2\ell + 1)^2$ mit $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$, etwa $n = 9$ oder $n = 25$, für die es prinzipiell keine Hadamard-Matrizen gibt. Bei der Umwandlung zu einem Krähenfuß ergibt sich als neuer Vorfaktor

$$\lambda' = \lambda \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} = \frac{1}{n - \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} = \frac{1}{(\sqrt{n}-1)\sqrt{n-1}}\,.$$

Außerdem funktioniert auch hier die Silvester-Konstruktion, sodass wir die Dimensionen $n = 2 \cdot (2\ell + 1)^2$ erreichen, etwa $n = 18$ oder $n = 50$, für die es ebenfalls keine Hadamard-Matrizen gibt, da sie nicht durch 4 teilbar ist. Da wir direkt mit den ONB arbeiten, müssen wir nachträglich noch mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ normieren:

$$A_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} A_n & -A_n \\ A_n & A_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel (Ganzzahliger 9-Krähenfuß)**.** Zuerst errechnen wir die Matrix-Einträge:

$$\lambda = \frac{1}{9 - \sqrt{9}} = \frac{1}{6}\,, \quad e = \sqrt{9} - 1 = 2\,, \quad f = 9 - \sqrt{9} - 1 = 5\,, \quad g = -1\,.$$

Unsere ONB mit konstanter Höhe lautet entsprechend

$$A_9 = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert uns schließlich den ganzzahligen 9-Krähenfuß

$$K_9 = \frac{1}{2\sqrt{8}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben für sehr viele Dimensionen n ganzzahlige Krähenfüße konstruiert. Dabei haben wir gesehen, dass dies äquivalent dazu ist, ganzzahlige Orthonormalbasen mit konstanter Höhe zu finden.

Mittels Hadamard-Matrizen können wir die Dimensionen 1, 2 sowie sehr viele durch 4 teilbare Dimensionen abdecken. Falls sich die Hadamard-Vermutung bewahrheiten sollte, können wir sogar alle durch 4 teilbare Dimensionen mit diesem Ansatz erreichen. Über einen alternativen Ansatz konnten wir zudem Dimensionen erreichen, die nicht durch 4 teilbar sind. Allerdings funktioniert dieser Ansatz nur, wenn die Dimension eine Quadratzahl oder das Doppelte einer solchen ist. Für alle übrigen Dimensionen ist die Frage nach ganzzahligen Krähenfüßen noch offen.

An dieser Stelle sei dazu aufgerufen, mit Modifikationen des alternativen Ansatzes zu experimentieren, um einige dieser Lücken schließen zu können. Wer eine größere Herausforderung sucht, möge sich an einer Hadamard-Matrix der Dimension 668 versuchen oder sich direkt der Hadamard-Vermutung zuwenden.

Der Autor nimmt weitere Hinweise zum Thema ganzzahlige Krähenfüße dankend entgegen und sammelt sie auf seiner Website `https://njh.eu/kraehenfuesse`.

Literatur

{berger}

[1] Andreas Berger: *Hilberts neuntes Problem – Das quadratische Reziprozitätsgesetz und die Suche nach Verallgemeinerungen*. $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 1/2017.

{singer}

[2] Armin Singer: *Höherdimensionale Krähenfüße*. $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 1/2017.